

# ETUDE EXPERIMENTALE DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE TURBULENTE DANS L'EAU

CHE PEN CHEN

Laboratoire de Mécanique Expérimentale des Fluides, Département de Mécanique, Université de Paris

(Reçu le 8 Juillet 1968)

**Résumé**—La solution semi-empirique de la couche limite thermique turbulente, obtenue par l'analogie de Reynolds, ne donne pas d'entière satisfaction. La réalisation des essais, surtout aux grands Nombres de  $Pr$  et de  $Re$ , se heurte à d'énormes difficultés techniques pour arriver à des résultats expérimentaux probants, sans s'écarter des hypothèses initiales (propriétés physiques du fluide constantes).

Des essais, d'une conception tout à fait nouvelle, ont pu être menés à bien pour le cas de la convection forcée pure en écoulement turbulent établi avec les propriétés physiques du fluide quasi-constantes. Les mesures précises de la répartition des températures près d'une paroi chauffante, montrent que le coefficient  $B$  de la loi semi-logarithmique  $\theta_+ = B \log y_+ + C$ , est de l'ordre de 4,85 (au lieu de 5,65 pour la répartition des vitesses) pour  $Pr \approx 7,5$  et  $Re \approx 250000$ , tandis que la constante  $C$ , dépendant de  $Pr$ , se situe aux environs de 47.

## NOTATIONS

$x, y, z,$	coordonnés du système cartésien;
$ox,$	placé suivant la plaque dans le sens de l'écoulement plan;
$y,$	distance à la paroi;
$u, v, w,$	composantes du vecteur vitesse $V$ suivant les 3 axes;
$t,$	temps;
$T,$	température;
$H,$	enthalpie;
$g,$	accélération de la pesanteur;
$\rho,$	masse volumique du fluide;
$\mu,$	viscosité dynamique;
$\nu,$	viscosité cinétique $\nu = \mu/\rho$ ;
$\lambda,$	conductivité du fluide;
$C_p,$	chaleur spécifique à pression constante;
$\Phi,$	fonction de dissipation;
$p,$	pression;
$h,$	cote du point considéré;
$\varphi_0,$	densité du flux.

Les indices 0 s'appliquent à toutes les grandeurs pour  $y = 0$  et les indices 1 à celles pour  $y = \infty$ ;

Les nombres sans dimension  $Pr$  et  $Re$  ont pour

référence la température  $T_1$  loin de paroi, mesurée directement lors des essais.

## 1. RAPPEL SUCCINCT DE L'ETUDE THEORIQUE

LES ÉQUATIONS générales de l'écoulement des fluides avec transfert thermique sont les suivantes:

Dynamique

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\rho \text{grad}(gh) - \text{grad} p + \mathbf{F}_t \quad (1)$$

Continuité

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{V} = 0 \quad (2)$$

Energie

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \text{div}(\lambda \text{grad} T) \quad (3)$$

Etat du fluide

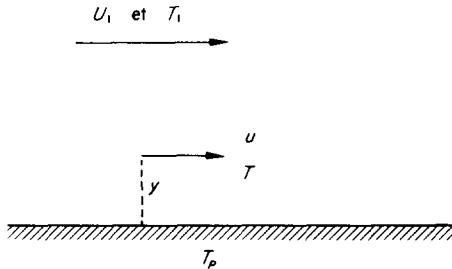
$$F(p\rho T) = 0. \quad (4)$$

Dans le cas de la convection forcée pure en

écoulement turbulent [1], en considérant par hypothèse les propriétés physiques du fluide ( $\rho\lambda\mu$ ) comme constantes, on separe le probleme thermique du problème dynamique, et on trouve des solutions semi-empiriques analogues pour les deux problèmes.

### 1.1.

Considérons le cas le plus simple : plaque plane lisse, chauffée très modérément à la température  $T_p$  constante, avec un écoulement turbulent sans gradient de pression.



Dans l'équation de l'énergie (3),  $Dp/Dt = 0$  et  $\Phi$  est en général négligeable devant  $\lambda \Delta T$ .

Comme il s'agit en premier lieu d'un écoulement turbulent, fluctuant, mais permanent en moyenne, nous allons introduire les valeurs moyennes dans le temps que nous désignons par des lettres surlignées

Soient  $A = \bar{A} + A'$

avec

$A$  valeur instantanée à l'instant  $t$  ;

$\bar{A}$  moyenne dans le temps ;

$A'$  fluctuation à l'instant  $t$  ;

on a :  $\bar{A}' = 0$  par définition.

Admettons ensuite, tant pour le calcul de la couche limite thermique que pour celui de la couche limite dynamique, que les dérivées portant sur des moyennes par rapport à  $x$  sont négligeables devant les dérivées par rapport à  $y$  portant sur ces mêmes moyennes, ainsi que les dérivées secondes :

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \ll \frac{\partial \bar{A}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial y^2}.$$

Avec le changement de variable  $\theta = T_p - T$ , l'équation d'énergie moyenne s'écrit alors :

$$\rho C_p \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) = \frac{\partial \left( \lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \rho C_p \bar{\theta}' v' \right)}{\partial y} \quad (5)$$

tandis que, compte tenu de l'équation de continuité, l'équation dynamique se réduit à :

$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \frac{\partial \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \bar{u}' v' \right)}{\partial y} \quad (6)$$

$\lambda$ ,  $\rho$  et  $\mu$  étant des constantes, ou considérées comme telles (puisque  $T_p - T_1$  est petit devant  $T_1$  par hypothèse), les deux équations thermique et dynamique peuvent ainsi être considérées comme indépendantes l'une de l'autre, mais présentent une grande analogie.

Elle n'est pas complète, Car, en grandeurs instantanées, (5) et (6) s'écrivent

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \lambda \Delta \theta \quad (5')$$

et

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \quad (6')$$

On trouve dans l'équation dynamique (6') le terme supplémentaire  $\partial p / \partial x$  sans équivalent dans (5').

### 1.2.

Pour arriver à une solution, il faut faire intervenir les conditions aux limites. Auparavant nous introduirons les variables adimensionnelles en posant :

$$y_+ = y u_* / \nu \quad \bar{u}_+ = \bar{u} / u_* \quad \bar{\theta}_+ = \bar{\theta} / \theta_*$$

avec 
$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

et 
$$\theta_* = \frac{\varphi_0}{\rho C_p u_*}$$

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda}$$
 (nombre de Prandtl).

Les conditions aux limites sont :

(1)  $y = 0, \quad \bar{u} = 0, \quad T = T_p, \quad \bar{\theta} = 0.$

(2)  $\delta \leq y < \infty, \quad \bar{u} = U_1,$   
 $T = T_1, \quad \bar{\theta} = \theta_1.$

Les lois semi-empiriques de répartition des vitesses près d'une paroi lisse sont bien connues, celles de répartition des températures seront semblables :

(1) pour  $0 < y_+ \leq 5$

Dynamique :

$$\bar{u}_+ = y_+$$

et

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_+}{\partial y_+}\right)_0 = 1$$

Thermique :

$$\bar{\theta}_+ = Pr y_+$$

et

$$\left(\frac{\partial \bar{\theta}_+}{\partial y_+}\right)_0 = Pr \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right)_0 = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$$

(2) pour  $5 < y_+ < 25$

Dynamique :

$$\bar{u}_+ = g(y_+)$$

Thermique :

$$\bar{\theta}_+ = f(Pr, y_+)$$

et enfin (3) pour  $25 < y_+ < y_{+ \text{ critique}}$ ,  $\bar{u}_+$  et  $\bar{\theta}_+$  sont tous deux, fonctions logarithmiques de  $y_+$ . Et de ce fait, on peut écrire :

$$\bar{\theta}_+ = A \bar{u}_+ + K.$$

D'après de nombreuses expériences faites avec l'air ( $Pr = 0,73$ ) dans les conduits circulaires chauffés à densité de flux constante, on trouve :

$$A \neq 1 \quad \text{et} \quad K = -5,4.$$

Si  $A$  semble rester constant, par contre  $K$  varie avec le nombre de  $Pr$ . Mais on possède peu de valeurs sûres pour les fluides de grands nombres de  $Pr$ .

Il faut aussi remarquer que la répartition de vitesse près d'une paroi suit des lois universelles, et que celle de température dépend de  $Pr$ .

### 1.3.

On désigne souvent :

$$\varepsilon_H = -\frac{\overline{\theta'v'}}{\partial \bar{\theta} / \partial y} \quad \text{et} \quad \varepsilon_m = -\frac{\overline{u'v'}}{\partial \bar{u} / \partial y}$$

respectivement sous les noms de "diffusivité thermique turbulente" et de "viscosité turbulente".

En fait, ces grandeurs sont dépourvues de signification physique particulière [2]. Néanmoins elles sont utilisées avec quelques hypothèses supplémentaires pour poursuivre le calcul théorique.

Ainsi l'étude théorique de Deissler [3] s'appuie (toujours dans le cas de propriétés physiques du fluide constantes) sur les deux hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\varepsilon_H = \varepsilon_m$$

et

$$\varepsilon_H / \nu = n^2 \bar{u}_+ y_+ [1 - \exp(-n^2 \bar{u}_+ y_+)]$$

où  $n$  est une constante d'origine expérimentale.

Deissler divise ensuite l'écoulement en deux zones qui ont comme frontière  $y_+ = 26$ .

$$\text{pour } 0 < y_+ < 26$$

$$\bar{\theta}_+ = \int_0^{y_+} \frac{dy_+}{1/Pr + n^2 \bar{u}_+ y_+ [1 - \exp(-n^2 \bar{u}_+ y_+)]}$$

est  $\bar{\theta}_+$  est obtenu par la méthode de calcul par itération ;

$$\text{et par } 26 < y_+, \quad \bar{\theta}_+ - \bar{\theta}_{+a} = \bar{u}_+ - \bar{u}_{+a}$$

avec  $\bar{\theta}_{+a}$  et  $\bar{u}_{+a}$  les valeurs correspondant à  $y_+ = 26$ .

On peut citer encore d'autres études théoriques telles que celle de Wasan et Wilke, et celle de Reichardt [4].

En général, elles donnent des résultats satisfaisants quand  $Pr$  est voisin de 1, mais beaucoup moins quand  $Pr$  s'en éloigne.

D'après les essais avec les métaux liquides [5], la loi  $\bar{\theta}_+ = Pr y_+$  est expérimentalement vérifiée jusqu'à  $Pr y_+ < 1$ , et la loi semi-logarithmique  $\bar{\theta}_+ = B \log y_+ + C$  n'est valable qu'à partir de  $Pr y_+ > 11,7$ . Un certain écart est évident entre ces résultats ( $Pr$  très petit) et les prévisions de Deissler.

## 2. ETUDE EXPERIMENTALE

Les essais avec les fluides de  $Pr$  grand sont peu nombreux, et les résultats obtenus concernent surtout l'effet global des échanges thermiques. La raison principale provient du fait que la couche limite thermique est d'autant plus mince† par rapport à la couche limite dynamique, que  $Pr$  est plus grand, ce qui entraîne des difficultés pour l'installation et des difficultés de mesures.

Pour faire face à ces difficultés, nos essais se font dans un canal découvert entièrement vitré. L'introduction des instruments de mesure est très facile, et les mesures peuvent se faire convenablement avec plus de précision, surtout en ce qui concerne la mesure de la distance à la paroi chauffante.

Le canal étant réglé sur une inclinaison supérieure à sa pente critique, l'écoulement y est torrentiel et devient rapidement uniforme.

Torrentiel, l'écoulement ne sera pas perturbé par l'introduction des instruments de mesure dans la section de mesure du côté Aval. Uniforme, l'écoulement est bien établi et presque identique à un écoulement en charge sur une longueur suffisante précédant cette section, ce ne sont pas les fluctuations de la surface libre qui

peuvent avoir une influence quelconque sur les échanges thermiques au fond.

Quant au problème thermique, c'est la densité de flux  $\varphi_0$  constante, mais non la température de paroi  $T_p$  constante, qui a été choisie. En effet, le gradient de température le long de la paroi à densité de flux constante reste, sauf tout à fait au début, très faible sur un tronçon fini donné, et ne modifie pas l'essentiel du résultat obtenu, mais l'avantage est que, avec une installation plus simple, la mesure de la densité de flux, obtenue par celle de la puissance électrique fournie, est beaucoup plus facile et précise.

### 2.1. Installation d'essais

(a) *Equipement hydraulique.* Le canal d'essai proprement dit est de section rectangulaire de 35 cm de large et de 25 cm de haut. Il a 18 m de long avec un raccord arrondi (quart de cercle) de 40 cm avec le bassin en amont. Il est entièrement en verre et repose sur une poutre métallique composée de 2 UPN 120. Cette dernière est fixée à l'amont de l'entrée, sur une articulation, et est posée ensuite sur trois vérins à vis synchronisés, équidistants, qui permettent de régler la pente jusqu'à 2 pour cent environ au maximum.

Le bassin amont est en béton armé, surélevé par rapport au sol. Il a 2 m de large, 5 m de long et 1,20 m de haut, ce qui fait une contenance de 10 m<sup>3</sup> d'eau environ. Quatre chicanes en bois y sont installées pour servir de tranquillisateurs. L'arrivée de l'eau se fait à l'aide d'une pompe à travers un diffuseur conique de 7 degrés qui a 4 m de long environ avec les diamètres de 16 cm à la section d'entrée et de 64 cm à celle de sortie. Sur les parois latérales du bassin, des déversoirs à hauteur variable ont été aménagés afin d'obtenir le niveau de la retenue rigoureusement constant. Il est ainsi permis d'assimiler ce bassin à un réservoir infiniment grand à niveau constant.

À l'aval, l'eau tombe en chute libre dans un bassin intermédiaire, d'où part un canal en béton de 10 m de long et de 79 cm de large. Côté Aval de ce dernier, se trouve un déversoir de

† D'après Pohlhausen [6], le rapport des deux couches limites peut s'écrire:  $\delta/\delta_T = Pr^\gamma$  avec  $\gamma$  voisin de  $\frac{1}{2}$  en régime laminaire.

50 cm de haut en mince paroi sans contradiction latérale, type Bazin, pour la mesure de débit. Enfin, l'eau se verse dans un grand réservoir souterrain de 200 m<sup>3</sup> de volume, dans lequel la pompe puise l'eau comme source. Le système fonctionne ainsi en circuit fermé†.

(b) *Equipement thermique.* A 12 m de l'entrée, le fond du canal d'essai en verre est remplacé, sur une longueur de 3 m, par cinq plaques en Cuivre Rouge, de 599, mm ( $\pm 0,55$ ) de long, de 349 mm (+0,00 et -0,10) de large, et de 8 mm ( $\pm 0,10$ ) d'épaisseur. La surface supérieure de ces plaques est rectifiée et plane à 0,05 mm près, elle est recouverte d'une couche de chrome dur de 0,02 mm d'épaisseur, pour éviter l'oxydation.

Le chauffage de ces plaques est effectué par des résistances électriques sous chacune d'elles. Ces résistances sont constituées par des "circuits imprimés" de la Société SIPEL, comprenant chacun 68 bandes en cuivre de 6 mm environ de large, disposées en forme de U droit et U renversé alternativement, avec un espacement de 2,5 mm entre deux bandes consécutives. Ces bandes de cuivre, d'une épaisseur de 70  $\mu$ , ont comme dimensions extérieures 585  $\times$  329 mm, et sont logées (ou emprisonnées) dans une feuille isolante stratifiée de 0,19 mm d'épaisseur en verre Epoxy. Cette chemise extérieure a comme dimensions extérieures 595  $\times$  339 mm. Voici les valeurs numériques des résistances de ces 5 circuits imprimés mesurées à la température ambiante (avant le montage) dans le sens de l'écoulement :

1	2	3	4	5
0,8585	0,9627	0,9649	0,9610	0,9846

en Ohms à 22°C.

A l'aide d'une feuille Millebond adhésive deux faces, un circuit imprimé est collé sous pression et à chaud (aux environs de 180°C) sur la face inférieure de chaque plaque en Cuivre Rouge. Afin de le protéger contre l'infiltration d'eau par les joints, une seconde plaque stratifiée

en Verre Epoxy (plus épaisse) est superposée par le dessous, et collée sur son contour, de façon étanche, directement sur chaque plaque en cuivre. L'ensemble repose sur une plaque "Permaglas" en fibre de verre, de 4 cm d'épaisseur, dont le coefficient de conduction est de 0,005 W/cm/degC, et qui est supportée directement par la poutre métallique sous le canal.

Le branchement de ces résistances se fait par le bas, et l'alimentation est en courant continu de 110 V par l'intermédiaire de trois rhéostats dont le premier alimente les trois premiers circuits imprimés.

Sept thermocouples en Cu et Constantan, gainés chacun dans un tube de  $\phi = 1$  mm en acier INOX rempli de poudre isolante, sont encastés transversalement (suivant des lignes quasi-isothermes) et sur mi-largeur du canal (soit 175 mm), sur la face chromée de ces cinq plaques en Cu. La répartition des thermocouples par plaque est de 2, 1, 1, 1 et 2. Ils sont destinés à la mesure des températures le long de l'axe.

## 2.2. Les mesures

(a) *Débit.* Le débit est mesuré par le déversoir en mince paroi, mentionné plus haut, avec ventilation sous la nappe déversante. Il a été étalonné auparavant par nos soins. L'erreur est très faible, et ne dépasse pas 0,5 pour cent.

Le débit pour nos essais se situe entre 35 à 40 l/s

(b) *Hauteur d'eau dans le canal.* Elle est mesurée par des limnimètres munis de vernier, permettant la lecture du niveau à 1/20 mm près, qui sont installés le long de l'axe longitudinal du canal sur des supports indépendants.

Il faut cependant tenir compte des fluctuations de la surface libre. La profondeur d'eau dans notre section de mesure pour nos essais est aux environs de 75 mm.

(c) *Flux.* Il est déterminé à partir de la mesure de la puissance électrique fournie à l'aide d'un ampèremètre et d'un voltmètre à 0,5 pour cent. La puissance utilisée se situe entre 1 et 2 W/cm<sup>2</sup>.

(d) *Viscosité.* Elle est calculée à partir d'une simple mesure de la température de l'eau dans la

† Voir [7]. L'installation est presque identique.

partie amont non chauffée, à l'aide d'un thermomètre à mercure.

(e) *Vitesse de l'écoulement.* Elle est mesurée à l'aide d'un tube de Pitot de 0,7 mm d'épaisseur extérieure et de 1,6 mm de largeur avec une fente de 0,2 mm environ [7], qui donne la pression totale. On verra plus loin comment opérer pour la répartition des vitesses.

(f) *Température.* La seule température réellement mesurée est  $T_1$ , à l'aide d'un thermomètre à mercure, gradué au 1/50 degC. Quant à la répartition de température, deux thermocouples en Cu et Constantan de  $\phi = 0,2$  mm sont utilisés: la température de référence restant toujours  $T_1$  le premier sert à mesurer  $T - T_1$  en fonction de la distance à la paroi chauffante  $y$ , tandis que le second est relié successivement aux 7 autres thermocouples encastrés pour donner  $T_p - T_1$  le long de l'axe longitudinal du canal.

La mesure directe de  $T_p - T$  ne donnait pas suffisamment de précision: en effet, pour la mesure de  $T - T_1$  qui ne dépasse jamais 1 degC, il est nécessaire de recourir à un galvanomètre très sensible ( $1,1 \times 10^{-8}$  A/mm) tandis que celle de  $T_p - T_1$  qui est de l'ordre de 3 à 5 degC, peut se faire par le même galvanomètre, mais à une sensibilité inférieure, et en même temps contrôlée par un millivoltmètre digital de  $\pm 5 \mu\text{V}$  de précision.

Enfin, deux formes différentes de soudure pour les thermocouples utilisés à la mesure de  $T - T_1$  ont été essayées: celle de deux fils côte à côte soudés en un point et celle de deux fils soudés bout à bout (9 mm au total) (Fig. 1).

L'étalonnage de ces thermocouples, très délicat, a été effectué à peu près dans les conditions d'utilisation: et leur emploi demande souvent des précautions particulières. La précision atteinte peut être estimée à 0,02 ou 0,03 degC près pour  $T - T_1$ , mais un peu moins de 0,1 degC pour  $T_p - T_1$ .

(g) *Distance à la paroi chauffante (le fond en Cu).* Elle est déterminée optiquement par un cathétomètre donnant une cote à 10  $\mu$  près, et mécaniquement par un microcomparateur,

fixé sur la même crémaillère que le thermocouple, permettant la lecture du déplacement de ce dernier à 0,01 mm près.

Le repérage du zéro, tâche très délicate, s'effectue de deux façons: par le cathétomètre en repérant une distance  $y$  donnée en comparaison avec une cale de précision (de 10 mm par ex.) avant la mise en écoulement de l'eau, et après celle-ci, par le microcomparateur au moment où le thermocouple entre en contact avec le fond sous la lumière d'un projecteur. Du premier, l'erreur peut venir du phénomène de diffraction, et du second, du petit jeu mécanique. L'erreur qui en résulte, peut cependant être estimée à moins de 0,05 mm. Il est évident que de ce fait, l'erreur relative sur  $y$  peut être importante pour toute valeur inférieure à 1 mm.

### 2.3. Les essais et les résultats

La mesure simultanée de la vitesse et de la température est théoriquement possible de deux façons: loger la soudure chaude du thermocouple à l'intérieur du tube de Pitot, ou placer le thermocouple et le tube de Pitot en deux points symétriques par rapport à l'axe de la section. Le premier moyen empêche des mesures de température tout près de la paroi et le second est beaucoup moins sûr qu'on croit [7]. Aussi, il est préférable d'opérer séparément ces deux séries de mesures, mais sur l'axe vertical de symétrie de la section, avec des données physiques pratiquement identiques.

Ceci dit, les moyennes dans le temps ont été obtenues par 20 relevés consécutifs à des intervalles de temps égaux: 35 s pour la mesure de vitesse et 10 s pour celle de température.

La répartition de vitesse s'obtient assez facilement et très correctement. D'où on déduit la valeur de  $u_*$  [7].

Pour la répartition de température, la régime thermique n'a pu être complètement stabilisé, en raison de l'énorme masse d'eau dans le réservoir souterrain. Mais comme il s'agit non pas des mesures de température absolue, mais de différence  $T - T_1$ , il y a peu d'influence sur le résultat obtenu.

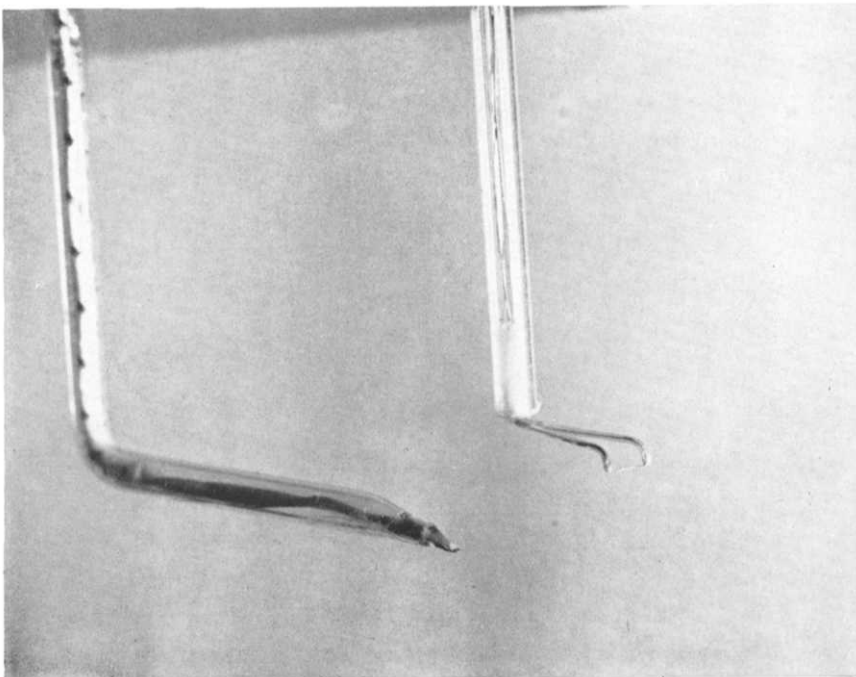


FIG. 1 Photographie des deux formes de soudure des thermocouples utilisés.

D'après les points expérimentaux obtenus avec deux thermocouples de formes différentes susmentionnés, mais pour des données physiques du même ordre, il ressort que :

(a) La loi semi-logarithmique de répartition des températures près de la paroi est bien vérifiée, mais à partir de  $y_+ = 60$  (et non  $y_+ > 25$  comme dans le cas de la couche limite dynamique). Cette limite pourrait être une fonction de  $Pr$ .

Dans le cas de l'eau à la température ambiante (aux environs de 20°C), les deux constantes  $B$  et  $C$  dans l'équation  $\bar{\theta}_+ = B \log y_+ + C$  sont les suivantes :

$$B \# 4,85 \quad \text{et} \quad C \# 47 \quad (\text{Fig. 2})$$

avec

$$Pr \# 7,5 \quad \text{et} \quad Re \# 250\,000.$$

La valeur de  $B$  ainsi trouvée est très près de celle trouvée par Neumann [4] et par d'autres auteurs, tandis que  $C$  ne vérifie pas la fonction linéaire de  $Pr$  qu'il a proposée.† Soulignons que le nombre de Reynolds de l'écoulement moyen est ici beaucoup plus élevé que dans les travaux antérieurs.

Il faut remarquer tout de suite que cette valeur  $B$  est difficile à déterminer avec grande précision, car il s'agit de la pente d'une ligne droite formée par des points expérimentaux. Mais il semble que dans l'expression  $\bar{\theta}_+ = A\bar{u}_+ + K$ , le coefficient  $A$  ( $A \# 0,86$ ) est certainement inférieur à 1 et non égal à 1 comme on admet jusqu'à présent (Fig. 3).

(b) D'après les relevés de température, on obtient bien :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$$

ou autrement dit

$$\left(\frac{\partial \bar{\theta}_+}{\partial y_+}\right)_0 = Pr.$$

Cependant il semble bien que la région où  $\bar{\theta}_+ = Pr y_+$  est plus mince que pour la répartition de vitesse, mais nous n'avons pu encore déterminer cette limite.

(c) Entre ces deux zones dont les limites ne sont plus  $y_+ = 5$  et  $y_+ = 25$ , et dans lesquelles la fonction  $\bar{\theta}_+ = f(\bar{u}_+)$  est représentée par deux lignes droites de pentes différentes, le raccordement entre elles comporte des points d'inflexion,‡ bien que  $\partial \bar{\theta}_+ / \partial \bar{u}_+$  reste toujours positif.

(d) Enfin dans cette dernière zone intermédiaire, l'étude théorique de Deissler [3] semble fournir des valeurs de  $\bar{\theta}_+$  plus petites que les valeurs mesurées.

## CONCLUSION

Ces premiers résultats ne suffisent pas encore à expliquer le phénomène complexe de la convection forcée en régime turbulent près de la paroi. D'autres essais sont en cours avec des thermocouples de 20  $\mu$ . La difficulté pour réaliser de tels essais sera certainement plus grande que nous l'avons signalée plus haut. Cette étude a été effectuée au Laboratoire de Mécanique Expérimentale des Fluides à Orsay, sous la direction de Monsieur le Professeur A. Fortier. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude et de nos remerciements.

## REFERENCES

1. A. FORTIER, Convection forcée, cours professé à la Sorbonne (1959-60).
2. L. TACCOEN, Etude de la diffusion turbulente de la chaleur dans un tube cylindrique circulaire lisse, Thèse Docteur Ingénieur, Université de Paris (1966).
3. R. G. DEISSLER, Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers, *NACA Rep. No. 1210* (1955).
4. J. C. NEUMANN, Transfert de chaleur turbulente pour de grands nombres de Prandtl, Thèse Docteur Ingénieur, Université de Paris (1967).
5. L. TACCOEN, Contribution à l'étude des échanges thermiques en écoulement turbulent dans un tube lisse. Application aux métaux liquides, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **10**, 1649-1660 (1967).

†  $\bar{\theta}_+ = 5 \log y_+ + 3,5 Pr_p$  d'après Neumann. A noter que la température de référence est ici celle de la paroi, et que  $Pr_p = 100$ .

‡ Les essais de Janberg, actuellement en cours, confirment ce résultat.



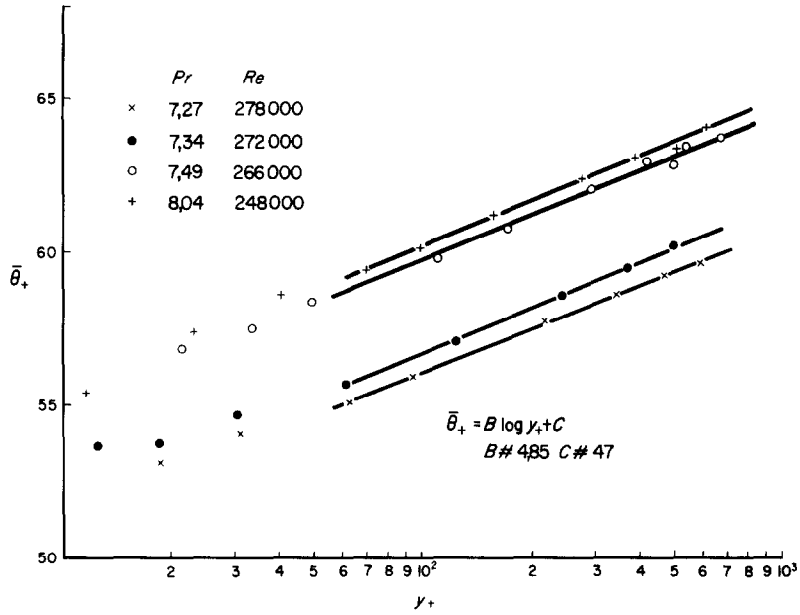


FIG. 2. Profils de températures près de la paroi.

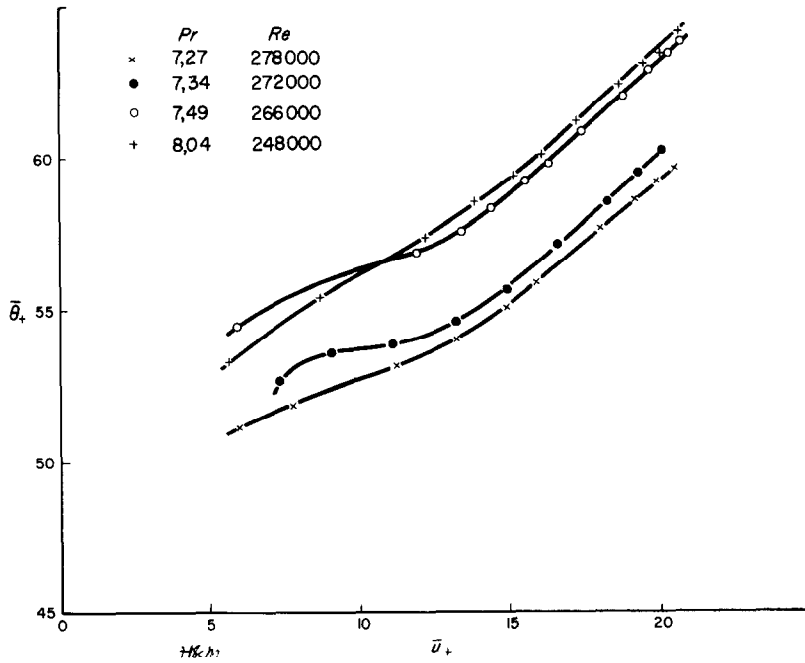


FIG. 3.  $\bar{\theta}_+$  en fonction de  $\bar{u}_+$ .

6. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York (1960).  
 7. C. P. CHEN, Contribution à l'étude de pertes de charge dans les canaux, Collection des Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, No. 380 (1961).

Tableau 1

$T_p - T_1 = 4,97 \text{ deg C}; \dagger \quad Re = 278000; \quad Pr = 7,27;$   
 (avec  $\nu_0 = 1,04 \text{ cSt}$ ).

$y \text{ (mm)}$	$T_p - T$	$y_+$	$\theta_+$	$u_+$
9,5	4,734	592	59,65	20,48
7,5	4,7	467	59,22	19,90
5,5	4,652	343	58,615	19,15
3,5	4,584	218	57,76	18,
1,5	4,437	93,5	55,91	15,92
1	4,372	62,3	55,09	14,91
0,5	4,29	31	54,09	13,2
0,5	4,285	31	54,	13,2
0,3	4,22	18,7	53,17	11,2
0,15	4,115	9,35	51,85	7,72
0,1	4,062	6,23	51,18	5,95
7,5	4,709	467	59,33	19,9

† La première plaque en Cu n'a pas été chauffée.

Tableau 2

$T_p - T_1 = 3,16 \text{ deg C}; \quad Re = 272000; \quad Pr = 7,34;$   
 (avec  $\nu_0 = 1,05 \text{ cSt}$ ).

$y \text{ (mm)}$	$T_p - T$	$y_+$	$\theta_+$	$u_+$
8	3,00	492	60,3	20,01
6	2,96	369	59,5	19,31
4	2,915	246	58,6	18,3
2	2,84	123	57,1	16,6
1	2,77	61,5	55,65	14,87
0,5	2,72	30,8	54,65	13,18
0,3	2,68	18,5	53,85	11,11
0,2	2,67	12,3	53,65	9
0,14	2,62	8,6	52,65	7,34
2	2,84	123	57,1	16,6

Tableau 3

$T_p - T_1 = 3,26 \text{ deg C}; \quad Re = 266000; \quad Pr = 7,49;$   
 (avec  $\nu_0 = 1,05 \text{ cSt}$ ).

$y \text{ (mm)}$	$T_p - T$	$y_+$	$\theta_+$	$u_+$
10,8	3,13	661	63,8	20,76
8,8	3,112	538	63,5	20,25
6,8	3,083	416	62,9	19,61
4,8	3,042	294	62,05	18,77
2,8	2,982	171	60,8	17,4
1,8	2,932	110	59,8	16,32
1,3	2,906	79,6	59,3	15,52
0,8	2,864	49	58,4	14,31
0,55	2,82	33,7	57,5	13,4
0,35	2,79	21,4	56,9	11,82
0,10	2,67	6,12	54,5	5,87
8,10	3,081	496	62,9	20,05

Tableau 4

$T_p - T_1 = 3,23 \text{ deg C}; \quad Re = 248000; \quad Pr = 8,04;$   
 (avec  $\nu_0 = 1,15 \text{ cSt}$ ).

$y \text{ (mm)}$	$T_p - T$	$y_+$	$\theta_+$	$u_+$
10,7	3,091	619	64,1	20,6
8,7	3,06	503	63,4	20,1
6,7	3,0438	387	63,1	19,44
4,7	3,011	272	62,4	18,6
2,7	2,95	156	61,2	17,2
1,7	2,9	98,3	60,1	16,05
1,2	2,8665	69,4	59,4	15,18
0,7	2,828	40,5	58,6	13,86
0,4	2,7715	23,1	57,4	12,17
0,2	2,675	11,56	55,4	8,7
0,1	2,57	5,78	53,3	5,6
6,7	3,054	387	63,4	19,44

**Abstract**—The semi-empirical solution of the turbulent thermal boundary layer, obtained by the Reynolds analogy, is not completely satisfactory. In realization of the experiments, especially at high  $Re$  and  $Pr$  numbers, enormous technical difficulties were overcome to allow conclusive experimental results without neglecting the initial assumptions (constant fluid properties).

By means of a new conception, some tests could be achieved in the case of forced convection in established turbulent flow region with quasiconstant physical fluid properties. The precise measures of the temperature distribution close to the heated wall, prove that the coefficient  $B$  of the semi-logarithmical law  $\theta_+ = B \log y_+ + C$  is of the order of 4.85 (instead of 5.65 for the velocity distribution) at  $Pr \neq 7.5$  and  $Re \neq 250000$ , while the constant  $C$ , depending on the number of  $Pr$ , is about 47.

**Zusammenfassung**—Die halb empirische Lösung für die turbulente thermische Grenzschicht nach der Reynolds-Analogie ist nicht vollständig zufriedenstellend. Um Versuche zu verwirklichen, die endgültige Ergebnisse liefern ohne die Vernachlässigung von Anfangsannahmen (konstante Flüssigkeitseigenschaften) sind grosse technische Schwierigkeiten zu überwinden, besonders bei hohen  $Re$ - und  $Pr$ -Zahlen.

Mit Hilfe einer neuen Vorstellung konnten Versuche für erzwungene Konvektion in ausgebildeter turbulenter Strömung mit quasikonstanten physikalischen Stoffwerten durchgeführt werden. Die genauen Messungen der Temperaturverteilung in Wandnähe zeigen, dass der Koeffizient  $B$  des halblogarithmischen Gesetzes  $\theta_+ = B \log y_+ + C$  einen Wert von etwa 4,85 besitzt (anstelle von 5,65 für die Geschwindigkeitsverteilung) bei  $Pr = 7,5$  und  $Re = 250000$ . Die Konstante  $C$  beträgt, abhängig von der  $Pr$ -Zahl etwa 47.

**Аннотация**—Полуэмпирическое решение турбулентного термического пограничного слоя, полученное с использованием аналогии Рейнольдса, не является полностью удовлетворительным. Проведение экспериментов, в особенности при больших числах  $Re$  и  $Pr$ , сопряжено с преодолением больших технических трудностей, если желательно получить окончательные экспериментальные результаты с учётом начальных допущений о постоянстве свойств жидкости.

С помощью нового понятия можно выполнить некоторые опыты при вынужденной конвекции в установившейся области турбулентного течения при квазипостоянных физических свойствах жидкости. Точные измерения распределения температуры вблизи нагретой стенки доказали, что величина коэффициента  $B$  полулогаримического закона  $\theta_f = B \log y_+ + C$  составляет 4,85 (вместо 5,65 для распределения скорости) при  $Pr = 7,5$  и  $Re = 250000$ , в то время как константа  $C$ , зависящая от критерия  $Pr$ , равна примерно 47.